Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы

Лекция 1.2

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Числовая последовательность

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Экономический пример:

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год.

Числовая последовательность

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$, $a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2$,...,$a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$, ..., где a_n - размер вклада в течение n-ого года.

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.

Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

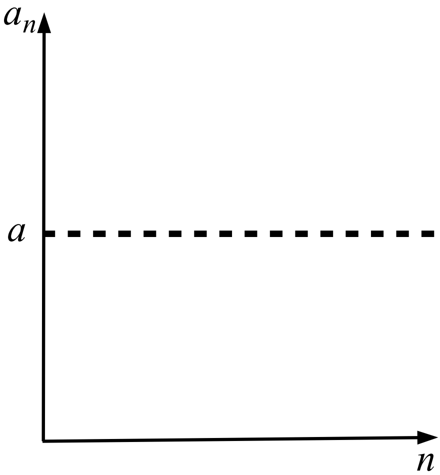
Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1, \ n(\varepsilon/2) = 2$$

Числовая последовательность

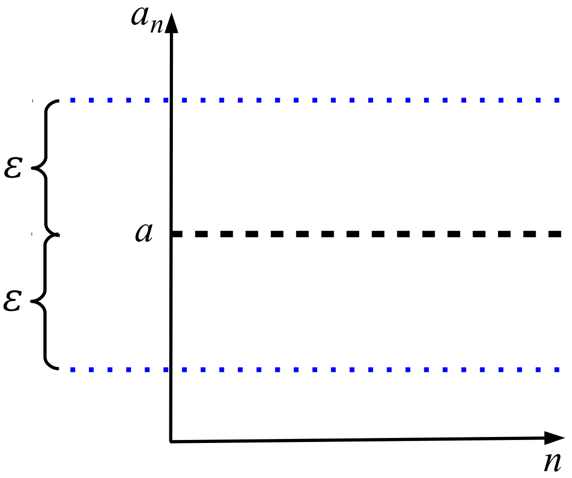
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

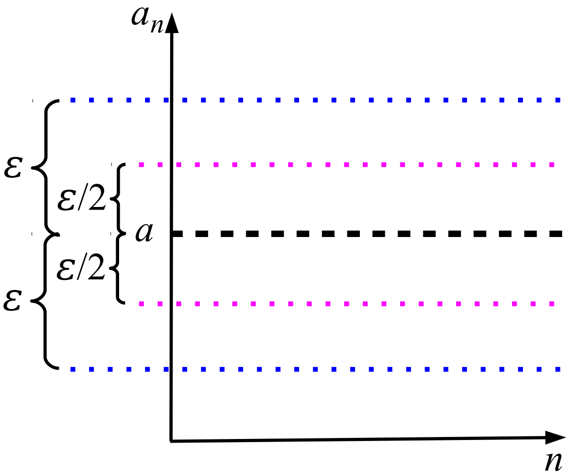
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

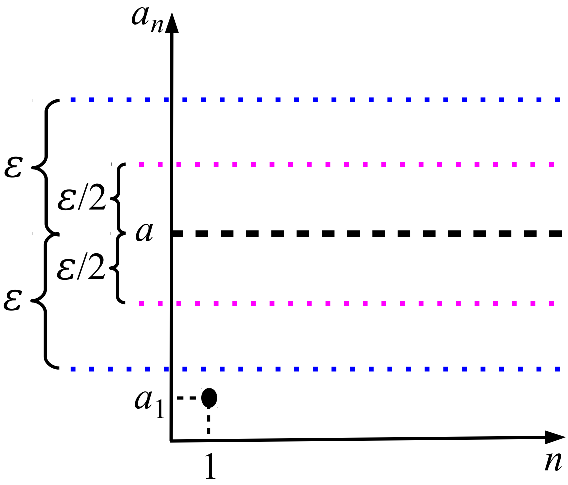
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

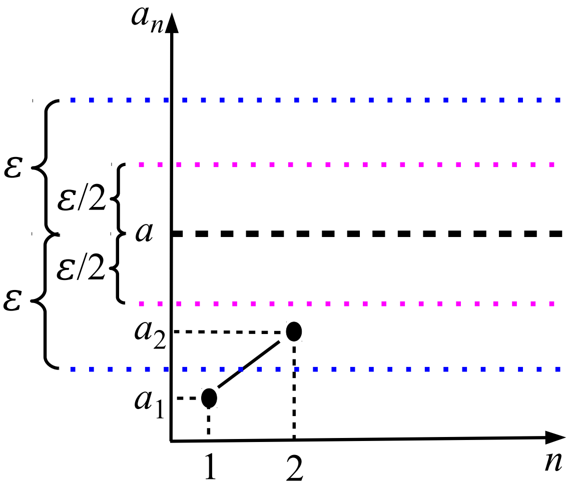
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

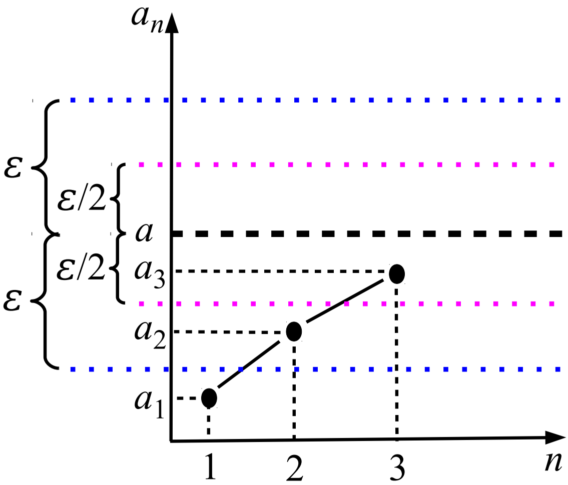
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

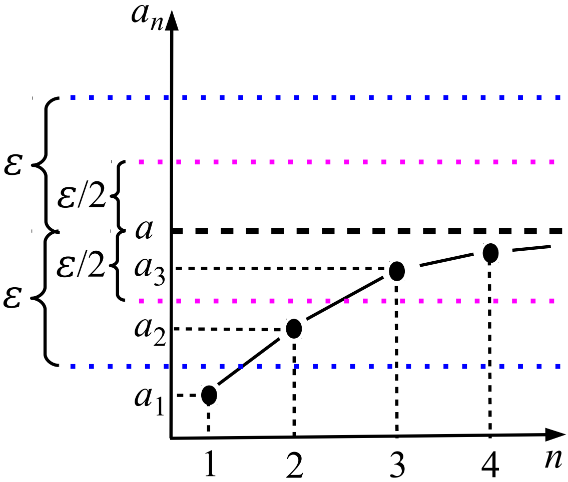
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Числовая последовательность

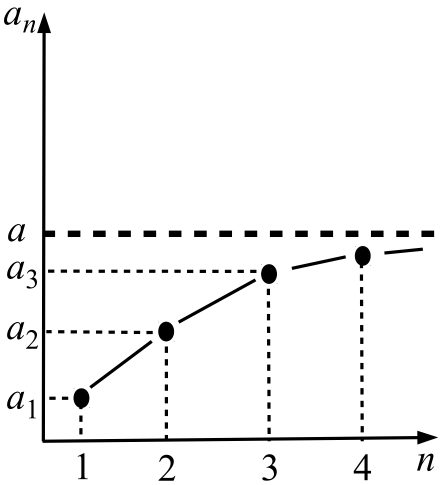
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



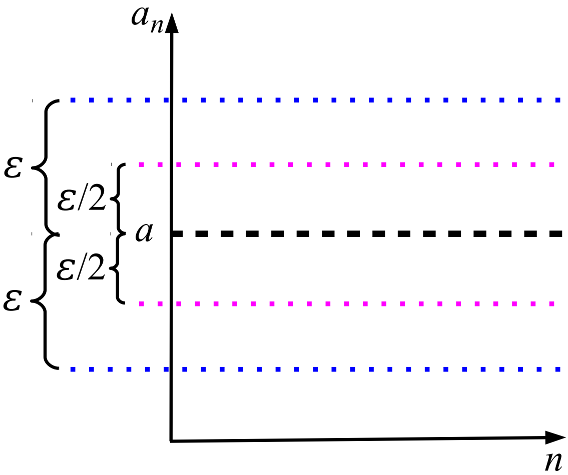
Числовая последовательность

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



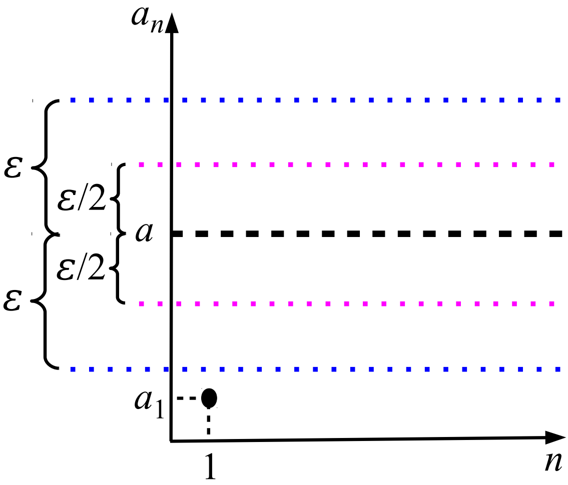
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



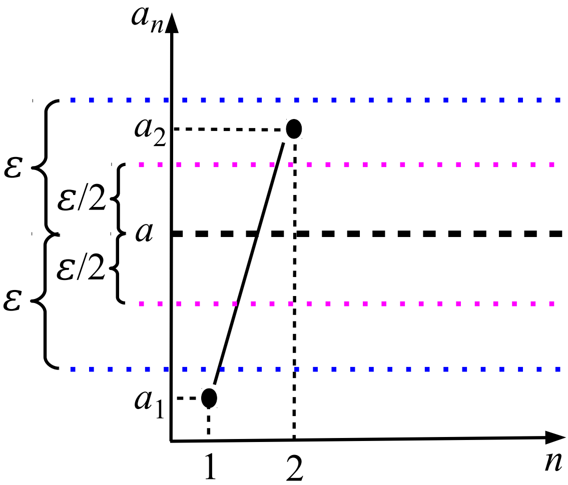
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1, \; n(\varepsilon/2) = 2$$



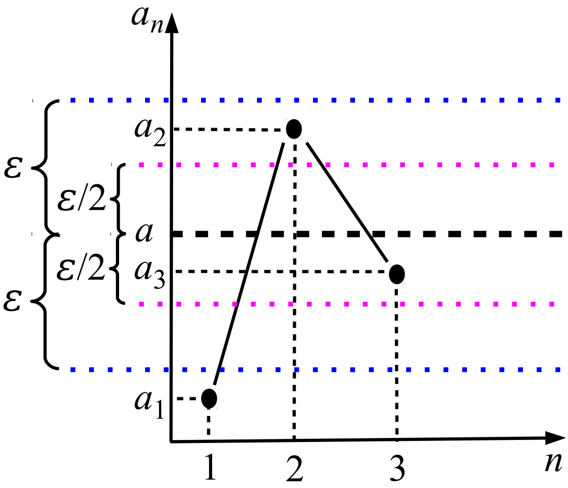
Числовая последовательность

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



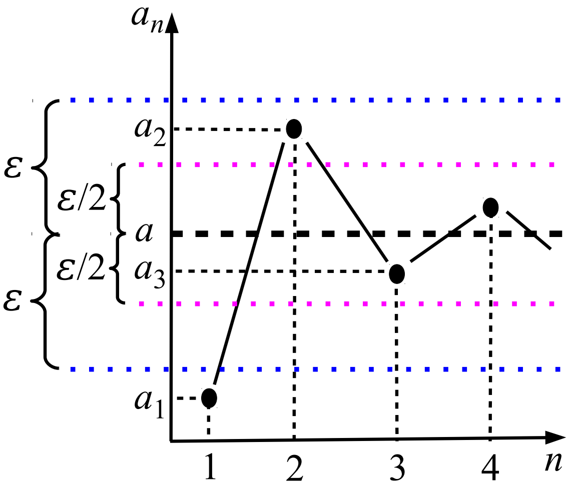
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon) \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$

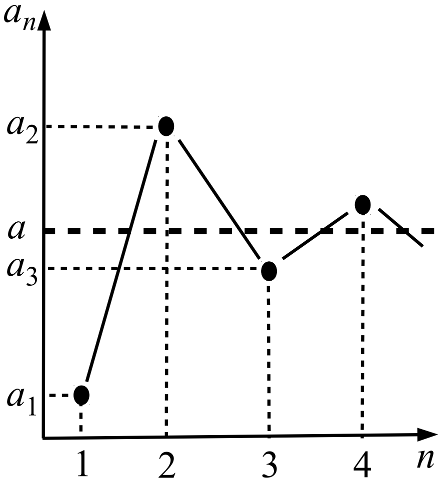


Числовая последовательность

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$
$$n(\varepsilon) = 1,\ n(\varepsilon/2) = 2$$



Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

*Арифметические свойства конечных пределов**

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a / b$, если $b \neq 0$.

Доказательство свойства 1

Доказательство свойства 1

Дано:

Доказательство свойства 1

Дано: $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (1)$$

Доказательство свойства 1

Дано:
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (1)$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \qquad (2)$$

Доказательство свойства 1

Дано:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \qquad (2)$$

Доказать:

Доказательство свойства 1

Дано: $$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad (1)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b \qquad (2)$$

Доказать: $$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b \qquad (3)$$

Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности
$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$:

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$:

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$:

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon. \tag{4}$$

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$:

$$|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon. \qquad (4)$$

Значит, нам надо найти $n(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство (4).

$(1) \Rightarrow$

Числовая последовательность

$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon)$:

Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \; \exists n_1(\varepsilon) \in N \; \forall n > n_1(\varepsilon):$$
$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$(2) \Rightarrow$

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon):$$

Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_1(\varepsilon): \quad |x_n - a| < \varepsilon/2.$$

$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2(\varepsilon) \in N \ \forall n > n_2(\varepsilon): \quad |y_n - b| < \varepsilon/2.$$

Числовая последовательность

$$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon):$$
$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$
$$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon):$$
$$|y_n - b| < \varepsilon/2.$$

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. (5)

$(1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon):$
$$|x_n - a| < \varepsilon/2.$$
$(2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon):$
$$|y_n - b| < \varepsilon/2.$$
Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. (5)

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2$.

Следовательно,

Следовательно,

$|x_n + y_n - a - b| =$

Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b|$$

Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b|$$

Следовательно,
$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

Следовательно,

$$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$$
$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Следовательно,
$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$
$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$
Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться,

Следовательно,
$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq$
$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$
Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться, а значит, справедлива формула (3). ■

Необходимое и достаточное условия сходимости

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists b > 0 \; \forall n \in N$: $|x_n| \leq b$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists b > 0\ \forall n \in N$: $|x_n| \leq b$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если $\exists b \in R\ \forall n \in N$: $x_n \leq b$ $(x_n \geq b)$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Необходимое и достаточное условия сходимости

*Теорема (необходимое условие сходимости)**
Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Тогда по определению предела

Необходимое и достаточное условия сходимости

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Возьмем $\varepsilon = 1$.

Тогда по определению предела

$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1$.

Необходимое и достаточное условия сходимости

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.
$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$

Необходимое и достаточное условия сходимости

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.

$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$

$\Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, \ldots, |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \le d$.
$\Rightarrow -d \le x_n - a \le d$
$\Rightarrow a - d \le x_n \le a + d$
$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n \in N$: $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n \in N$: $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$.

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Необходимое и достаточное условия сходимости

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)
Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon) \colon |x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение
Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Частные случаи

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall\varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Теорема (единственность предела)
Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (предельный переход в неравенствах)
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Число e

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$.

Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.

Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции.

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Число e

Экономическое приложение:

Число e

Экономическое приложение:
В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.

Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.

Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r.

Число e

Экономическое приложение:
В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.
Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год.

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Число e

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \to \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$