Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.4

Аннотация

Общие свойства пределов. Первый замечательный предел и его следствия. Второй замечательный предел и его следствия. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции.

1 Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где b - конечное число. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $|f(x) - b| < 1$. Раскрыв модуль, получим $-1 < f(x) - b < 1$ или $b - 1 < f(x) < b + 1$. Следовательно, в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ ограничена. ■

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

Если в точке a функция $f(x)$ имеет не равный нулю конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности точки a функция имеет тот же знак, что и сам предел.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, где b - конечное число, $b > 0$. Тогда $\forall\varepsilon > 0$ $\exists \overset{\circ}{U}(a,\delta)$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = b$. Тогда $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $|f(x) - b| < b$. Раскрыв модуль, получим $-b < f(x) - b < b$ или $0 < f(x) < 2b$. Следовательно, в некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна. Аналогично доказывается случай $b < 0$. ■

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $f(x) \geq A$ в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке конечный или бесконечный определенного знака предел, то

$$\lim_{x\to a} f(x) \geq A.$$

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A,$$

где A - конечное число или бесконечность определенного знака, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Теорема (единственность предела)

Если функция $f(x)$ имеет в точке a предел, то этот предел единственный

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ и } \lim_{y\to b} g(y),$$

и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$ и

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to b} g(y).$$

2 Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 1$,

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x-2)}{2x-2} \neq 1$.

Следствия:

$$1) \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 1$$

$$2) \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\arcsin u}{u} = 1$$

$$3) \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{arctg} u}{u} = 1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{u\to 0} (1+u)^{1/u} = e$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e$,

2) $u = 4x-1 \to -1$ при $x \to 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+(4x-1))^{1/(4x-1)} \neq e$.

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \ln a$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$$

3 Бесконечно малые функции

Определение

Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

*Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**

Конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен b тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) - b) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - b = b - b = 0$. Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(b + \alpha(x)) = b + \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = b + 0 = b$. ■

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$,

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$,

3) $\alpha(x) \cdot \gamma(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство свойства 1

$\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) + \beta(x)) = \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) + \lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0 + 0 = 0$.

$\Rightarrow \alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$. ■

4 Бесконечно большие функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

*Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)**

Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists \overset{\circ}{U}(a)\ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| > 1/\varepsilon$.

$|f(x)| > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/|f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} 1/f(x) = 0$

$\Rightarrow 1/f(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$. $\blacksquare$