Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.1

Аннотация

Логические символы. Виды чисел. Прямая и обратная теоремы. Необходимое и достаточное условия. Расширенное множество действительных чисел. Типы промежутков. Ограниченное и неограниченное множества. Точная верхняя и точная нижняя грани. Принцип вложенных отрезков. Числовая функция. Основные элементарные функции. Элементарная функция.

1 Логические символы

1. $\forall$ - любой, для любого

 $\forall x > 0$ - любое положительное число x

2. $\exists$ - существует

 $\exists x > 1$ - существует число x, большее одного

3. $\Rightarrow$ - следует, следовательно, тогда, то

 $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

4. $\Leftrightarrow$ - равносильно, эквивалентно, тогда и только тогда

 $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$

5. $\in$ - принадлежит

 $x \in A$ - число x принадлежит множеству A

 $1 \in \{1, 2, 3\}$

6. $\subset$ - включено

 $A \subset B$ - множество A включено в множество B, т.е. все элементы множества A являются также и элементами множества B

 $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

2 Множества чисел

$N = \{1, 2, ...\}$ - множество натуральных чисел
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ - множество целых чисел
Q - множество рациональных чисел. Пример: $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$
I - множество иррациональных чисел. Пример: $\sqrt{2}$, π.
R - множество действительных чисел - это множество всех рациональных и иррациональных чисел

3 Теорема

Определение

Математические утверждения, в правильности которых убеждаются путем рассуждений или доказательств, называются **теоремами**.

Каждая теорема состоит из двух частей: из **условия** и **заключения**. Условие обыкновенно начинается со слова “если”, а заключение — со слова “то”. Условие — это то, что дано; заключение — это то, что надо доказать.

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение - условием, то исходная теорема будет называться **прямой**, получившаяся - **обратной**, а обе теоремы вместе - **взаимно обратными**.

Определение

Необходимым условием называется условие, без соблюдения которого данное утверждение не может быть истинным.

Определение

Достаточным условием называется такое условие, при выполнении которого данное утверждение является истинным.

4 Расширенное множество действительных чисел

Определение

Дополним множество действительных чисел R двумя элементами $+\infty$ и $-\infty$. Полученное множество называется **расширенным множеством действительных чисел** и обозначается $\overline{R}$.

$a \in \overline{R} \rightarrow a$ - конечное число, $+\infty$ или $-\infty$.

Определение

Элементы $+\infty$ и $-\infty$ называются **бесконечными числами**.

Свойства бесконечных чисел

1) $-\infty < +\infty$
2) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
3) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
4) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
5) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

Для любого конечного числа a справедливы свойства

1) $-\infty < a < +\infty$
2) $a + (+\infty) = +\infty$
3) $a + (-\infty) = -\infty$
4) если $a > 0$, то $a \cdot (+\infty) = +\infty$, $a \cdot (-\infty) = -\infty$
5) если $a < 0$, то $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$

Выражения $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $1^{\pm\infty}$ неопределены и называются **неопределенностями**.
Если знак бесконечного числа неизвестен, то это число называется **бесконечностью без знака** и обозначается ∞.

5 Промежутки

1) Отрезок

$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ - множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$

2) Интервал

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$

3) Полуинтервал

$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

6 Свойства числовых множеств

Промежутки - частный случай числового множества, т.е. множества, содержащего некоторый набор чисел.

Примеры: $[1, 3]$ - отрезок, $(1, 4)$ - интервал, $\{1, 3, 5\}$ - числовое множество с элементами 1, 3, 5.

Определение

Числовое множество E называется **ограниченным сверху (снизу)**, если $\exists b \in R$ $\forall x \in E$: $x \leq b$ $(x \geq b)$.

Расшифровка математических символов:

$\exists b \in R$ - существует такое действительное число b, что

$\forall x \in E$ - для любого числа x из множества E

: - выполняется

$x \leq b$ - x меньше или равен b

$x \geq b$ - x больше или равен b

Определение

Числовое множество E называется **неограниченным сверху (снизу)**, если $\forall b \in R$ $\exists x \in E$: $x > b$ $(x < b)$

Расшифровка математических символов:

$\forall b \in R$ - для любого действительного числа b

$\exists x \in E$ - существуе такое число x из множества E, что

: - выполняется

$x > b$ - x больше b

$x < b$ - x меньше b

Определение

Множество E называется **ограниченным**, если $\exists b > 0\ \forall x \in E$: $|x| \leq b$

Определение

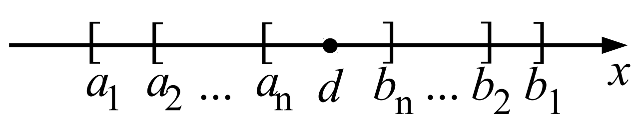
Наименьшее из всех чисел, ограничивающих множество E сверху, называется его **точной верхней гранью** и обозначается $supE$ (читается "супремум E").

Определение

Наибольшее среди всех чисел, ограничивающих множество E снизу, называется его **точной нижней гранью** и обозначается $infE$ (читается "инфимум E").

7 Принцип вложенных отрезков

Рассмотрим бесконечную последовательность отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ...



Определение

Система отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... называется **системой вложенных отрезков**, если

$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1$.

Определение

Говорят, что **длина вложенных отрезков стремится к нулю**, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|b_n - a_n| < \varepsilon$.

Расшифровка математических символов:

$\forall\varepsilon > 0$ - для любого положительного ε

$\exists n(\varepsilon) \in N$ - существует натуральное число n, зависящее от ε, такое что

$\forall n > n(\varepsilon)$ - для любого натурального числа n, превосходящего $n(\varepsilon)$

: - выполняется

$|b_n - a_n| < \varepsilon$ - модуль разности b_n и a_n меньше ε.

Теорема (принцип вложенных отрезков)

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная точка d, которая принадлежит всем отрезкам системы, причем $d = sup\{a_n\} = inf\{b_n\}$.

8 Числовая функция

Определение

Числовая функция - это правило, ставящее в соответствие каждому элементу некоторого числового множества X некоторое число из множества действительных чисел

Обозначение: $y = f(x)$

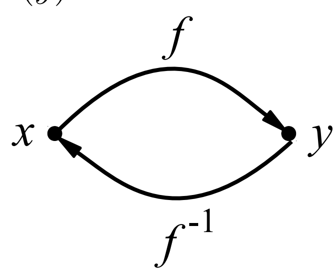
Определение

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Определение

Пусть дана функция $y = f(x)$. Функция, ставящая в соответствие каждому числу y соответствующее значение x, называется **обратной функцией**.

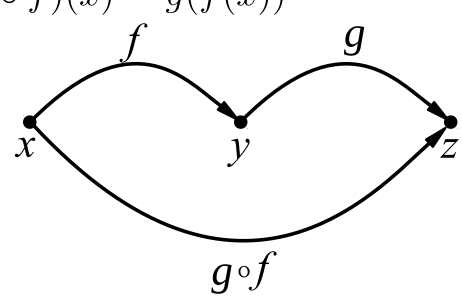
Обозначение: $x = f^{-1}(y)$



Определение

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Функция $z = g(f(x))$ называется **сложной функцией** или **композицией функций** f и g.

Обозначение: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



9 Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся:

1) $y = x^\alpha$
2) $y = a^x, a > 0, a \neq 1$
3) $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$
4) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$
5) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Определение

Функция называется **элементарной**, если она задана с помощью формулы, содержащей конечное число арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций.

Примеры: $y = 2x^2 + 3x + 5$, $y = \sin(2^x)$.

Пример функции, которая не является элементарной:

$$y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

Классификация элементарных функций:

1) многочлен (полином)
$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$,

2) рациональная функция (дробно-рациональная функция)
$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - полиномы,

3) иррациональная функция - это функция, содержащая иррациональности, т.е. корни различных степеней
$y = x + \sqrt[3]{x}$,

4) трансцендентная функция - это функция, содержащая в себе различные тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные и логарифмические функции.
$y = x + \sqrt{x} + \sin x$.