Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.2

Аннотация

Числовая последовательность и ее предел. Арифметические свойства конечных пределов. Необходимое и достаточное условия сходимости. Бесконечно большая последовательность. Бесконечно малая последовательность. Теоремы о конечных и бесконечных пределах. Число e и гиперболические функции.

1 Числовая последовательность

Определение

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n. Совокупность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называется **числовой последовательностью**.

Обозначение: $\{a_n\}$ - числовая последовательность с общим членом a_n.

Определение

Число a_n называется **n-ым членом последовательности** и задается формулой $a_n = f(n)$.

Примеры: $a_n = 1/2^n$, $a_n = (-1)^n \cdot n^3$.

Экономический пример: Допустим, мы открываем в банке вклад на 10 тыс. руб. под 10% годовых с капитализацией процентов и периодом капитализации 1 год. Тогда величина вклада по годам будет представлять собой числовую последовательность $a_1 = 10$,

$a_2 = 10 \cdot 1,1$, $a_3 = 10 \cdot 1,1^2$,...,$a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$, ..., где a_n - размер вклада в течение n-ого года.

Определение

Конечное число a называется **пределом последовательности** $\{a_n\}$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Здесь a - конечное число, т.е. $a \neq \pm\infty$. Поэтому определенный таким образом предел часто называют **конечным пределом**.

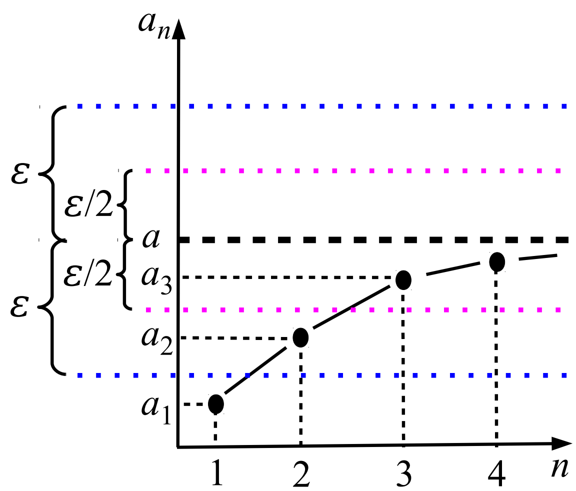
Определение

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. В противном случае она называется **расходящейся**.

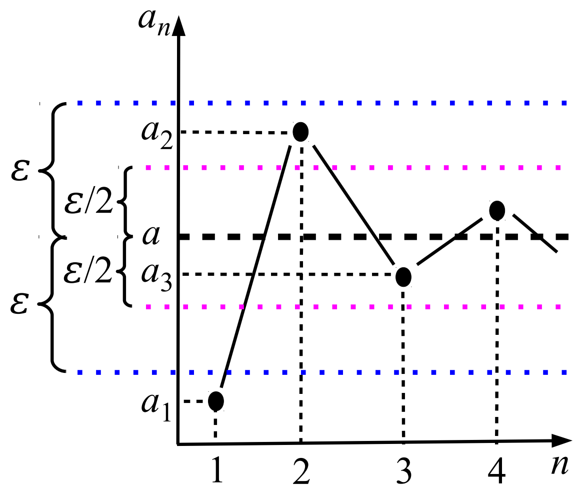
Геометрическая интерпретация сходящейся последовательности:

Пусть в определении предела $n(\varepsilon) = 1$, $n(\varepsilon/2) = 2$. Приведем два возможных варианта поведения сходящейся числовой последовательности в окрестности числа a:

1) вариант 1



2) вариант 2



*Арифметические свойства конечных пределов**

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$
2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$
3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n / y_n) = a/b$, если $b \neq 0$.

Доказательство свойства 1

Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ (2)

Доказать: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$ (3)

Последовательность $\{x_n + y_n\}$ имеет предел $a + b$, если согласно определению предела числовой последовательности

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n + y_n - a - b| < \varepsilon$, (4)

т.е. нам надо найти $n(\varepsilon)$, при котором выполняется неравенство (4).

(1) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_1(\varepsilon)$: $|x_n - a| < \varepsilon/2$.

$(2) \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_2(\varepsilon) \in N\ \forall n > n_2(\varepsilon)$: $|y_n - b| < \varepsilon/2$.

Пусть $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. (5)

Тогда $\forall n > n(\varepsilon)$ будут одновременно выполняться неравенства $|x_n - a| < \varepsilon/2$ и $|y_n - b| < \varepsilon/2$. Следовательно,
$|x_n + y_n - a - b| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Это означает, что при задании $n(\varepsilon)$ по формуле (5) неравенство (4) будет выполняться, а значит, справедлива формула (3). ■

2 Необходимое и достаточное условия сходимости

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если $\exists b > 0\ \forall n \in N$: $|x_n| \leq b$.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если $\exists b \in R\ \forall n \in N$: $x_n \leq b$ $(x_n \geq b)$.

*Теорема (необходимое условие сходимости)**

Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.

Доказательство

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда по определению предела $\exists n_1\ \forall n > n_1$: $|x_n - a| < 1$. Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$. Тогда $\forall n \in N$: $|x_n - a| \leq d$.

$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$

$\Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если $\forall n \in N$: $x_n \leq x_{n+1}$ ($x_n \geq x_{n+1}$).

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)

Всякая возрастающая (убывающая) и ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет конечный предел.

3 Бесконечно большая и бесконечно малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n < -\varepsilon$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Свойства бесконечно малых последовательностей:

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями:

1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.
2. Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.

Символически это можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$

4 Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.

Теорема (единственность предела)

Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.

Теорема (предельный переход в неравенствах)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и $\forall n : x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

5 Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции:

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год. Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \to \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$