Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.6

Аннотация

Непрерывность функций. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций, непрерывных в точке.

1 Непрерывность функции

Определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Эквивалентное определение

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, называется **непрерывной** в этой точке, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta \colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

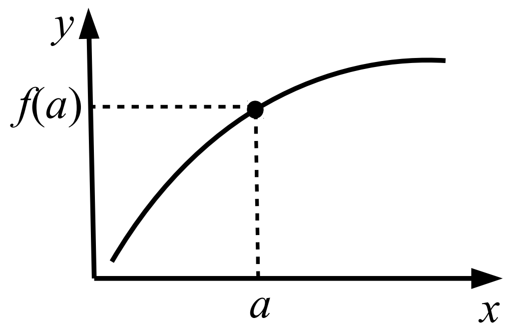
Обозначение: $f(x) \in C(a)$ - функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

Замечание

Непрерывность функции предполагает, что эта функция определена в некоторой окрестности точки a, включая саму точку a.

Геометрическая интерпретация

Графически непрерывность функции в точке a означает, что ее график в окрестности точки a представляет собой сплошную линию, которая не претерпевает каких-либо разрывов при переходе через саму точку a.



$\Leftrightarrow$ - знак равносильности и эквивалентности. Если этот знак присутствует в тексте определений и теорем, то он часто читается как

1) необходимо и достаточно,

2) тогда и только тогда, когда.

Пример: Выражение $A \Leftrightarrow B$ читается как

1. Утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда справедливо утверждение B.

2. Для справедливости утверждения A необходимо и достаточно справедливость утверждения B.

Запись $A \Leftrightarrow B$ означает, что одновременно выполняются два условия:

1) $A \Rightarrow B$ - если справедливо A, то справедливо B (необходимость),

2) $A \Leftarrow B$ - если справедливо B, то справедливо A (достаточность).

Другими словами, утверждения A и B справедливы или нет одновременно.

Введем обозначения:

$\Delta x = x - a$ - приращение аргумента,

$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - приращение функции в точке a.

*Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности функции в точке)**

$$f(x) \in C(a) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Расшифровка математической записи:

$f(x) \in C(a)$ - Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке a

$\Leftrightarrow$ - необходимо и достаточно, чтобы

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ - предел приращения функции в точке a равнялся нулю при стремлении к нулю приращения аргумента.

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \in C(a)$

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

$f(x) \in C(a) \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in R, |x - a| < \delta$: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$\Delta x = x - a \Rightarrow x = a + \Delta x \Rightarrow f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f$.

Тогда условие непрерывности функции в точке можно переписать в виде:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta$: $|\Delta f| < \varepsilon$.

Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

2) достаточность

Дано: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$

Доказать: $f(x) \in C(a)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \Delta x \in R, |\Delta x| < \delta \colon |\Delta f| < \varepsilon.$
Так как $\Delta x = x - a, \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f(x) - f(a)$, то
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in R, |x - a| < \delta \colon |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$
$\Rightarrow f(x) \in C(a).$ ■

2 Односторонняя непрерывность

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, c]$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева** в точке c, если

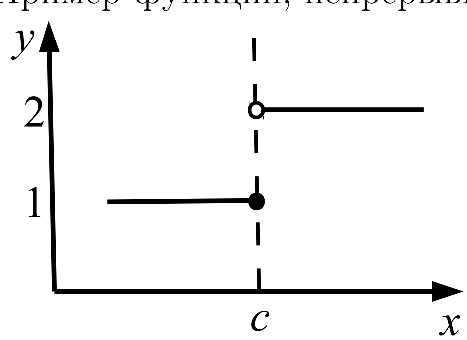
$$\lim_{x \to c-0} f(x) = f(c).$$

Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[c, b)$. Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа** в точке c, если

$$\lim_{x \to c+0} f(x) = f(c).$$

Пример функции, непрерывной слева:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le c \\ 2, & x > c \end{cases}$$

3 Точки разрыва

Определение

Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если $f(x)$ не определена в точке a или определена, но не является в ней непрерывной.

Классификация точек разрыва

1. Если a - точка разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x),$$

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

то точка a называется **точкой разрыва первого рода**.

2. Если a - точка разрыва первого рода и

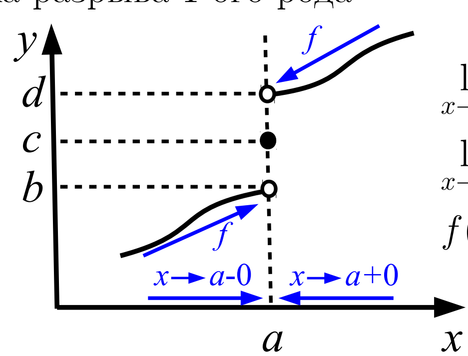
$$f(a-0) = f(a+0),$$

то a называется **точкой устранимого разрыва**.

3. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется **точкой разрыва второго рода**.

Примеры:

1) точка разрыва 1-ого рода

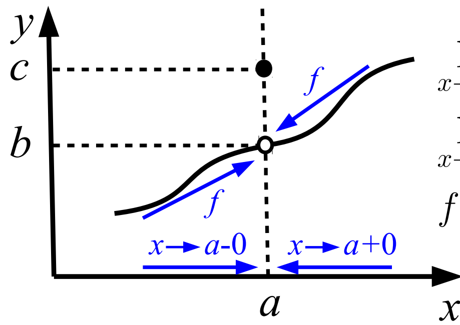


$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = d,$$

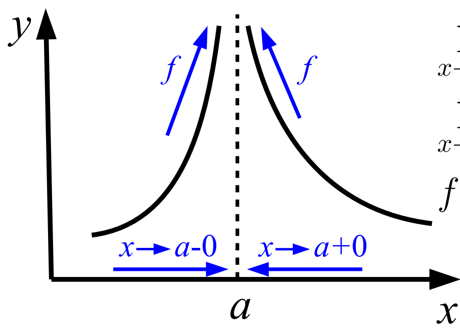
$$f(a) = c.$$

2) точка устранимого разрыва



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = b,$$
$$f(a) = c.$$

3) точка разрыва 2-ого рода



$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$$
$f(a)$ - неопределена.

4 Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема (арифметические свойства непрерывных функций)

Если $f(x), g(x) \in C(a)$, то

1) $f + g \in C(a)$
2) $f \cdot g \in C(a)$
3) $f/g \in C(a)$, если $g(a) \neq 0$

Теорема (непрерывность сложной функции)

Если $f(x) \in C(a)$ и $g(y) \in C(b)$, где $b = f(a)$, то $g(f(x)) \in C(a)$.

*Теорема (непрерывность основных элементарных функций)**

Основные элементарные функции непрерывны всюду в их области определения.

Доказательство для $y = \sin x$

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x =$

$= 2\sin\dfrac{x + \Delta x - x}{2}\cos\dfrac{x + \Delta x + x}{2} = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x + \dfrac{\Delta x}{2}).$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos(x + \dfrac{\Delta x}{2}) =$

$= |\text{бесконечно малая} \cdot \text{ограниченная} = \text{бесконечно малая}| = 0.$

$\Rightarrow \sin x \in C(x).$ ■

Теорема (непрерывность элементарной функции)

Любая элементарная функция непрерывна в любой точке области ее определения.