

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ
Модуль 1. Элементарные функции и пределы
Лекция 1.5

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Сравнение функций



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ - некоторая проколота окрестность точки a .



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ - некоторая проколота окрестность точки a .

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\mathring{U}(a)$, если $\exists c > 0 \forall x \in \mathring{U}(a): |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$.



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ - некоторая проколота окрестность точки a .

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\mathring{U}(a)$, если

$$\exists c > 0 \forall x \in \mathring{U}(a): |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Пусть $\mathring{U}(a)$ - некоторая проколота окрестность точки a .

Определение

Функция $f(x)$ называется **ограниченной по сравнению** с функцией $g(x)$ в $\mathring{U}(a)$, если

$$\exists c > 0 \forall x \in \mathring{U}(a): |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|.$$

Обозначение: $f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a$.

Произношение: f - это "О"-большое от g .



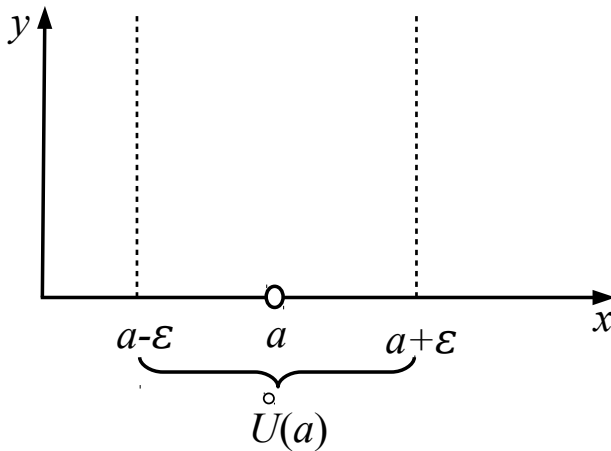
Сравнение функций

Пример:



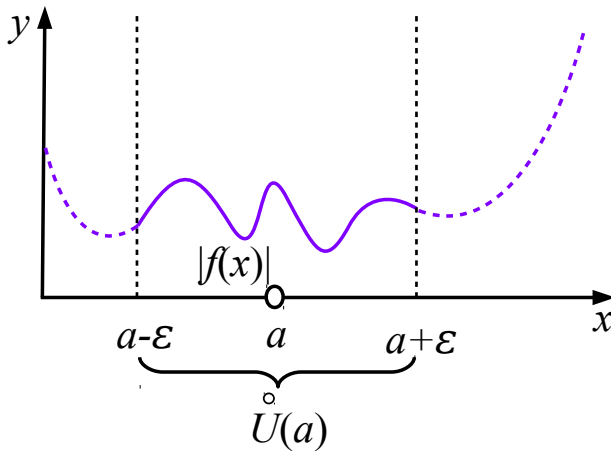
Сравнение функций

Пример:



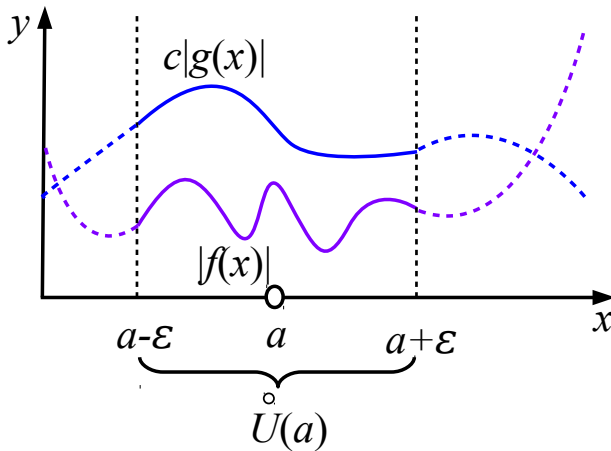
Сравнение функций

Пример:



Сравнение функций

Пример:



Сравнение функций

Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \rightarrow a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \rightarrow a$, то они называются **функциями одного порядка** при $x \rightarrow a$.

Обозначение: $f(x) \asymp g(x), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **эквивалентными** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Обозначение: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Свойства эквивалентных функций



Сравнение функций

Свойства эквивалентных функций

1) если $f \sim g, x \rightarrow a$, то $g \sim f, x \rightarrow a$

2) если $f \sim g$ и $g \sim h, x \rightarrow a$, то $f \sim h, x \rightarrow a$



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x) \neq 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x) \neq 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = o(f(x)), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x) \neq 0 \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$. Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой по сравнению** с функцией $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Обозначение: $g(x) = o(f(x)), x \rightarrow a$.

Произношение: g - это "о"-малое от f при $x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$ и $g(x) = o(f(x))$, $x \rightarrow a$. Тогда говорят, что $g(x)$ является **бесконечно малой более высокого порядка**, чем $f(x)$.



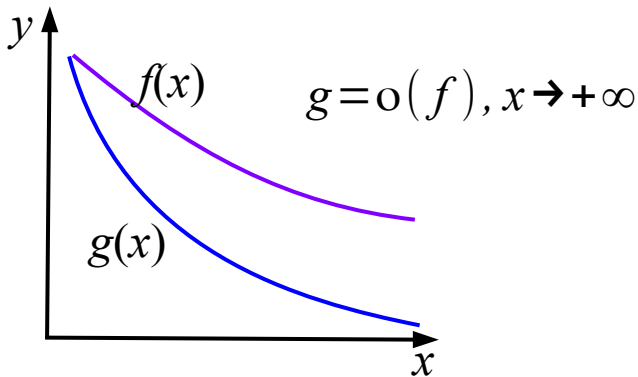
Сравнение функций

Пример:



Сравнение функций

Пример:



Сравнение функций

Здесь обе функции f и g стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$, только функция g убывает быстрее, чем функция f .



Сравнение функций

Определение

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые функции при $x \rightarrow a$ и $g(x) = o(f(x))$, $x \rightarrow a$.

Тогда функция $g(x)$ называется **бесконечно малой порядка r относительно** функции $f(x)$, если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{(f(x))^r}.$$



Сравнение функций

Свойства “о”-малое



Сравнение функций

Свойства “о”-малое

$$1) \circ(f) + \circ(f) = \circ(f)$$

$$2) \circ(cf) = \circ(f), c \neq 0$$

$$3) c \cdot \circ(f) = \circ(f), c \neq 0$$

$$4) \circ(\circ(f)) = \circ(f)$$

$$5) \circ(f + \circ(f)) = \circ(f)$$

$$6) \circ(f^n) \cdot \circ(f^m) = \circ(f^{n+m})$$

$$7) (\circ(f))^n = \circ(f^n)$$



Сравнение функций

*Теорема (о связи эквивалентности и
“о”-малое)**



Сравнение функций

*Теорема (о связи эквивалентности и “о”-малое)**

Для того, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы при $x \rightarrow a$ выполнялось условие

$$f(x) = g(x) + o(g(x)).$$



Сравнение функций

Доказательство



Сравнение функций

Доказательство

1) необходимость



Сравнение функций

Доказательство

1) необходимость

Дано: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$.

Доказать: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) =$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$f(x) - g(x) =$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) =$$



Сравнение функций

Введем функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Так как $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$$f(x) - g(x) = \varphi(x)g(x) - g(x) = (\varphi(x) - 1)g(x).$$



Сравнение функций

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} =$$



Сравнение функций

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} =$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) =\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0. \\ \Rightarrow f(x) - g(x) &= o(g(x)), x \rightarrow a.\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\varphi(x) - 1)g(x)}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) - 1) = 1 - 1 = 0. \\ \Rightarrow f(x) - g(x) &= o(g(x)), x \rightarrow a. \\ \Rightarrow f(x) &= g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a.\end{aligned}$$



2) достаточность



Сравнение функций

2) достаточность

Дано: $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$.

Доказать: $f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$.



Сравнение функций

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} =$$



Сравнение функций

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} =$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \right) =\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} =\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = \\&= 1 + 0 = 1.\end{aligned}$$



Сравнение функций

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)}\right) = 1 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{o(g(x))}{g(x)} = \\&= 1 + 0 = 1. \\&\Rightarrow f(x) \sim g(x), x \rightarrow a. \blacksquare\end{aligned}$$



Сравнение функций

Определение

Если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \rightarrow a$, то функция $g(x)$ называется **главной частью** функции $f(x)$.



Сравнение функций

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**



Сравнение функций

*Теорема (о пределах эквивалентных функций)**

Пусть $f(x) \sim f_1(x)$ и $g(x) \sim g_1(x)$ при $x \rightarrow a$.

Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)/g_1(x)$, то существует и $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$



Сравнение функций

Доказательство



Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} =$$



Сравнение функций

Доказательство

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f \cdot f_1 \cdot g_1}{f_1 \cdot g_1 \cdot g} =$$



Сравнение функций

Доказательство

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f \cdot f_1 \cdot g_1}{f_1 \cdot g_1 \cdot g} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{f_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1}{g} =\end{aligned}$$



Сравнение функций

Доказательство

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f \cdot f_1 \cdot g_1}{f_1 \cdot g_1 \cdot g} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{f_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{g_1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1}{g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1}{g_1}. \blacksquare\end{aligned}$$



Сравнение функций

Для применения этой теоремы необходимо знать таблицу эквивалентных функций.



Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций



Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

1) $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$

2) $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$

3) $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$

4) $\operatorname{arctg} x \sim x, x \rightarrow 0$

5) $1 - \cos x \sim x^2/2, x \rightarrow 0$



Сравнение функций

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$$6) \ln(1 + x) \sim x, x \rightarrow 0$$

$$7) e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0,$$

$$8) a^x - 1 \sim x \ln a, x \rightarrow 0$$

$$9) (1 + x)^m - 1 \sim mx, x \rightarrow 0$$



Сравнение функций

Используя теорему о замене переменной можно показать, что в данной таблице отношение эквивалентности сохранится, если переменную x заменить на какую-либо функцию u .



Сравнение функций

Примеры:



Сравнение функций

Примеры:

$$1) \sin u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$2) \operatorname{tg} u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$3) e^u - 1 \sim u, u \rightarrow 0$$



Сравнение функций

Примеры:

$$1) \sin u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$2) \operatorname{tg} u \sim u, u \rightarrow 0$$

$$3) e^u - 1 \sim u, u \rightarrow 0$$

Здесь $u = u(x)$ - некоторая функция, которая должна стремиться к нулю: $u \rightarrow 0$.

