Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы

Лекция 1.4

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.

Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Общие свойства пределов

*Теорема (локальная ограниченность функции)**

Если функция $f(x)$ имеет в точке a конечный предел, то существует такая проколотая окрестность точки a, в которой функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда

Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overset{\circ}{U}(a, \delta) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где b - конечное число.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(a,\delta) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1$.

$\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta)$: $|f(x) - b| < 1$.

Общие свойства пределов

$$\Rightarrow -1 < f(x) - b < 1$$

Общие свойства пределов

$$\Rightarrow -1 < f(x) - b < 1$$
$$\Rightarrow b - 1 < f(x) < b + 1.$$

$\Rightarrow -1 < f(x) - b < 1$
$\Rightarrow b - 1 < f(x) < b + 1.$
$\Rightarrow$ В некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ ограничена. $\blacksquare$

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

*Теорема (локальная знакоопределенность функции)**

Если в точке a функция $f(x)$ имеет не равный нулю конечный предел, то в некоторой проколотой окрестности точки a функция имеет тот же знак, что и сам предел.

Доказательство

Общие свойства пределов

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Тогда

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(a, \delta) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = b$.

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, b - конечное число, $b > 0$.

Тогда

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overset{\circ}{U}(a, \delta) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = b$.

$\Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$: $|f(x) - b| < b$.

$$\Rightarrow -b < f(x) - b < b$$

Общие свойства пределов

$$\Rightarrow -b < f(x) - b < b$$
$$\Rightarrow 0 < f(x) < 2b.$$

Общие свойства пределов

$\Rightarrow -b < f(x) - b < b$

$\Rightarrow 0 < f(x) < 2b.$

$\Rightarrow$ В некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна.

Общие свойства пределов

$\Rightarrow -b < f(x) - b < b$

$\Rightarrow 0 < f(x) < 2b.$

$\Rightarrow$ В некоторой окрестности точки a функция $f(x)$ положительна.

Аналогично доказывается случай $b < 0$. ■

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Теорема (1-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)
Если $f(x) \geq A$ в некоторой проколотой окрестности точки a и имеет в этой точке конечный или бесконечный определенного знака предел, то

$$\lim_{x \to a} f(x) \geq A.$$

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)

Общие свойства пределов

Теорема (2-ая теорема о предельном переходе в неравенстве)
Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = A,$$

где A - конечное число или бесконечность определенного знака, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Теорема (единственность предела)

Теорема (единственность предела)
Если функция $f(x)$ имеет в точке a предел, то этот предел единственный

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Теорема (предел сложной функции и замена переменной)

Пусть существуют конечные или бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{y\to b} g(y)$, и пусть в некоторой проколотой окрестности точки a имеет место $f(x) \neq b$. Тогда в точке a существует предел сложной функции $g(f(x))$ и $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to b} g(y)$.

Замечательные пределы

Первый замечательный предел:

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

Замечательные пределы

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

Замечательные пределы

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 5x \to 0$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1,$$

2) $u = 2x - 2 \to -2$ при $x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x-2)}{2x-2} \neq 1.$$

Следствия:

Следствия:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{tg} u}{u}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\arcsin u}{u}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1 \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{arctg} u}{u}=1$$

Второй замечательный предел:

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u} = e$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e \qquad \lim_{u \to 0} (1 + u)^{1/u} = e$$

Здесь u - произвольная функция, которая обладает свойством: $u \to 0$.

Примеры:

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e,$

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e$,

2) $u = 4x - 1 \to -1$ при $x \to 0$

Примеры:

1) $u = 3x \to 0$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x} = e$,

2) $u = 4x - 1 \to -1$ при $x \to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+(4x-1))^{1/(4x-1)} \neq e$.

Замечательные пределы

Следствия:

Замечательные пределы

Следствия:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = e$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{a^u-1}{u} = \ln a$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u} = 1$

Бесконечно малые функции

Бесконечно малые функции

Определение
Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

*Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**

*Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой)**
Конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$ существует и равен b тогда и только тогда, когда $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство

Бесконечно малые функции

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) =$

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) =$$

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - b =$$

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a}(f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) - b =$$
$$= b - b =$$

Бесконечно малые функции

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - b = $$
$$= b - b = 0.$$

Бесконечно малые функции

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) - b) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - b =$
$= b - b = 0.$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - b) = \lim_{x\to a} f(x) - b =$$
$$= b - b = 0.$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$,

Доказательство

1. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Зададим функцию $\alpha(x) = f(x) - b$ и рассмотрим ее предел:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - b) = \lim_{x \to a} f(x) - b = \\ = b - b = 0.$$

Получаем, что $\alpha(x)$ - это бесконечно малая при $x \to a$.

Т.к. $\alpha(x) = f(x) - b$, то $f(x) = b + \alpha(x)$.

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (b + \alpha(x)) =$

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}(b + \alpha(x)) =$

$= b + \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) =$

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(b + \alpha(x)) =$
$= b + \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = b + 0 =$

Бесконечно малые функции

2. Пусть $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(b + \alpha(x)) =$
$= b + \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = b + 0 = b$. $\blacksquare$

*Свойства бесконечно малых функций**

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

Бесконечно малые функции

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

Бесконечно малые функции

*Свойства бесконечно малых функций**

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые при $x \to a$, а $\gamma(x)$ - ограниченная функция. Тогда

1) $\alpha(x) + \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

2) $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

3) $\alpha(x) \cdot \gamma(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$

Доказательство свойства 1

Бесконечно малые функции

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x \to a}(\alpha(x) + \beta(x)) =$$

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x)) = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) =$$

Бесконечно малые функции

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x)) = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Доказательство свойства 1

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x)+\beta(x)) = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) =$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

$\Rightarrow \alpha(x)+\beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$.

$\blacksquare$

Бесконечно большие функции

Бесконечно большие функции

Определение

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

*Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)**

Бесконечно большие функции

*Теорема (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций)**
Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Бесконечно большие функции

Доказательство

Бесконечно большие функции

Доказательство

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Доказательство

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\circ}{U}(a) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \colon |f(x)| > 1/\varepsilon.$$

Доказательство

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{\circ}{U}(a) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \colon |f(x)| > 1/\varepsilon.$$

$$|f(x)| > 1/\varepsilon$$

Бесконечно большие функции

Доказательство

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \overset{\circ}{U}(a) \ \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)\colon |f(x)| > 1/\varepsilon.$

$|f(x)| > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/|f(x)| < \varepsilon$

Бесконечно большие функции

Доказательство

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{\circ}{U}(a) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a) \colon |f(x)| > 1/\varepsilon.$$

$$|f(x)| > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/|f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} 1/f(x) = 0$$

Бесконечно большие функции

Доказательство

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \overset{\circ}{U}(a) \; \forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$: $|f(x)| > 1/\varepsilon$.

$|f(x)| > 1/\varepsilon \Rightarrow 1/|f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} 1/f(x) = 0$

$\Rightarrow 1/f(x)$ - бесконечно малая при $x \to a$. ■